View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Kyoto University Research Information Repository

KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

KYOTO UNIVERSITY

Title	Minimal Setの基本群について (力学系の理論とその応用)
Author(s)	石井, 一平
Citation	数理解析研究所講究録 (1981), 443: 184-190
Issue Date	1981-12
URL	http://hdl.handle.net/2433/102858
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Kyoto University

数理解析研究所講究録
443巻 1981年 184-190

Minimal Set の基本群について

慶応大・理工，石井一平

§1. 準備

M を3次元閉多様で，$H^1(M;\mathbb{R})$ は自明であるとする。さらに，M は minimal flow（＝すべての軌道が M 上稠密であるような flow）を許容するものとする。以下では，このような性質をもつ M について，その基本群の持つ特性を調べる。ここで，以下に使われる記号をまとめておく。

イ）ξ_t ： M 上の minimal flow.

ロ）Σ ： ξ_t に接しない codim-1 open submanifold

ハ）$T_\Sigma(x) = \inf\{t>0 \mid \xi_t(x) \in \overline{\Sigma}\}$

$\hat{T}_\Sigma(x) = \xi_{T_\Sigma(x)}(x)$ ： $x \in M$

ニ）$A_\Sigma = \{x \in \partial\Sigma \mid \hat{T}_\Sigma(x) \in \partial\Sigma\}$

$A_\Sigma^* = A_\Sigma \cup \hat{T}_\Sigma(A_\Sigma)$

ホ）$B_\Sigma = \{x \in \partial\Sigma \mid \hat{T}_\Sigma(x) \in \Sigma,\ \hat{T}_\Sigma^2(x) \in \partial\Sigma\}$

$B_\Sigma^* = B_\Sigma \cup \hat{T}_\Sigma^2(B_\Sigma)$

（A_Σ, B_Σ は有限集合で，$\hat{T}_\Sigma(\partial\Sigma) \cap \hat{T}_\Sigma^{-1}(\partial\Sigma) = \hat{T}_\Sigma(B_\Sigma)$ と仮定して一般性を失わない。）

へ）$\nu_0 = \nu_0(\Sigma) = \# A_\Sigma + \# B_\Sigma$

$\nu_1 = \nu_1(\Sigma) = \#(A_\Sigma^* \cup B_\Sigma^*)$

$\nu_2 = \nu_2(\Sigma)$: $\Sigma - (\hat{T}_\Sigma(\partial\Sigma) \cup \hat{T}_\Sigma^{-1}(\partial\Sigma))$ の連結成分の個数.

$\nu_3 = \nu_3(\Sigma)$: $\Sigma - \hat{T}_\Sigma^{-1}(\partial\Sigma)$ の連結成分の個数.

ト）C_ℓ $(\ell = 1, \cdots, \nu_1)$, D_m $(m = 1, \cdots, \nu_2)$, E_n $(n = 1, \cdots, \nu_3)$ はそれぞれ $\partial\Sigma - (A_\Sigma^* \cup B_\Sigma^*)$, $\Sigma - (\hat{T}_\Sigma(\partial\Sigma) \cup \hat{T}_\Sigma^{-1}(\partial\Sigma))$, $\Sigma - \hat{T}_\Sigma^{-1}(\partial\Sigma)$ の連結成分を表わす。（これらの番号付は固定されているものとする。）

チ）$Y_0(\Sigma) = \partial\Sigma \cup \{\xi_t(a) \mid a \in A_\Sigma,\ 0 \le t \le T_\Sigma(a)\}$
$\cup \{\xi_t(b) \mid b \in B_\Sigma,\ 0 \le t \le T_\Sigma(b) + T_\Sigma(\hat{T}_\Sigma(b))\}$

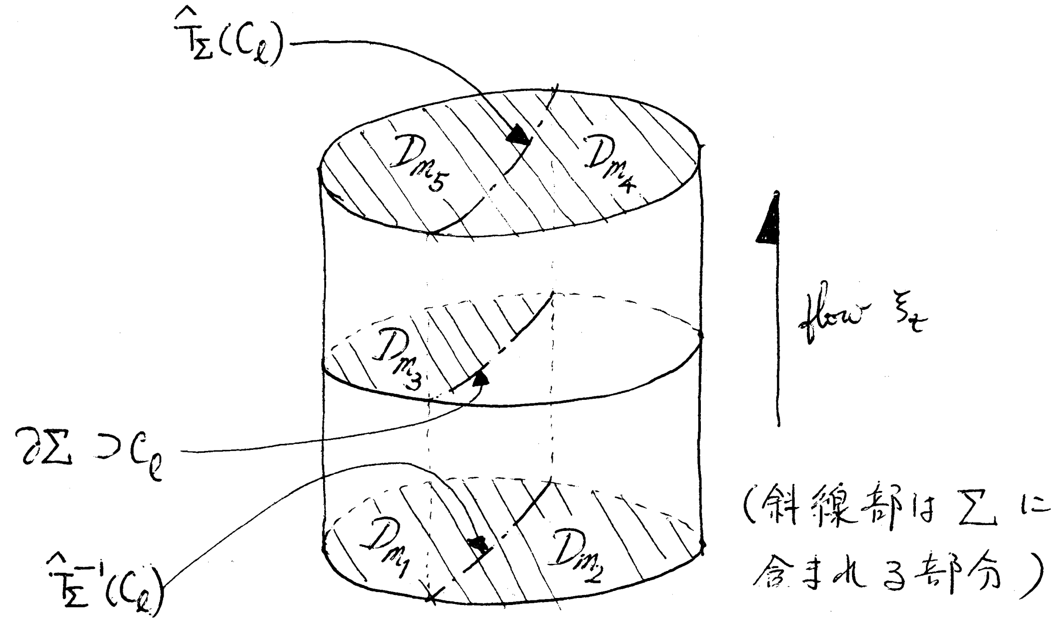
リ）$\{1, \cdots, \nu_1\}$ の部分集合 J に対して

$$Y(\Sigma; J) = Y_0(\Sigma) - (\bigcup_{\ell \in J} C_\ell)$$

と定義する。

§2. $\pi_1(M - Y(\Sigma; J))$ について.

まず各 C_ℓ $(1 \le \ell \le \nu_1)$ に対して，D_{m_j} $(m_j = m_j(\ell)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5)$ を，下の [Fig.] のように定める。次に $\mathbb{H} = (H_1, H_2, \cdots, H_{\nu_2}) \in (SL(2; \mathbb{C}))^{\nu_2}$ に対し、



[Fig.]

$G_\ell(H) \in SL(2;\mathbb{C})$ を

$$G_\ell(H) = H_{m_4}^{-1} H_{m_5} H_{m_3} H_{m_1} H_{m_2}^{-1}$$

$$(m_j = m_j(\ell))$$

と定義する。さらに $V(\Sigma;J) \subset (SL(2;\mathbb{C}))^{\nu_2}$ を

$$V(\Sigma;J)=\{H \,;\, G_\ell(H)=1 \text{ for } \ell\in J\}$$

とする。一方

$$Q(\Sigma;J)=\mathrm{Hom}(\pi_1(M-Y(\Sigma;J)),\ SL(2;\mathbb{C}))$$

とすると、$V(\Sigma;J)$, $Q(\Sigma;J)$ はそれぞれ $\mathbb{C}^{4\nu_2}$, $\mathbb{C}^{4r}$ (r は $\pi_1(M-Y(\Sigma;J))$ の生成元の個数)の中の代数的集合

と考えられる。ここで Σ は次の仮定をみたすものとする。

<u>仮定 I.</u> $H^1(D_m;\mathbb{R}) = H^1(E_n;\mathbb{R}) = \{0\}$

$$(1 \leq m \leq \nu_2,\ 1 \leq n \leq \nu_3)$$

このとき、次が成り立つ。

<u>命題 A.</u> $\dim Q(\Sigma;J) + 3(\nu_3 - 1) = \dim V(\Sigma;J)$

$M = S^3$ とすると、$\pi_1(M - Y(\Sigma;J))$ が free group となることがある。この場合には、$\dim Q(\Sigma;J) = 3\dim H^1(Y(\Sigma;J);\mathbb{R})$ であるから、命題 A により、$\dim V(\Sigma;J) = 3\dim H^1(Y(\Sigma;J);\mathbb{R}) + 3(\nu_3 - 1)$ となる。そこで次の仮定を設ける。

<u>仮定 II.</u> $V(\Sigma;J)$ は次の (i), (ii) を満たす成分 V_0 をもつ。

(i) $\dim V_0 > 3\dim H^1(Y(\Sigma;J);\mathbb{R}) + 3(\nu_3 - 1)$

(ii) ある $\mathbb{H} = (H_1, \cdots, H_{\nu_2}) \in V_0$ に対し、各 H_j は対角行列。

Σ, J が仮定 I および II を満たすとき、次のことが示される。

<u>命題 B.</u> $\Upsilon(\Sigma;J)$ を $M-\Pi^*(\Sigma;J)$ の中で連続的に変形して得られる任意の 1-次元 cell complex K に対し

$$\dim(\mathrm{Hom}(\pi_1(M-K), SL(2;\mathbb{C}))) > 3\dim H^1(K;\mathbb{R})$$

が成り立つ。但し $\Pi^*(\Sigma;J)$ は下に定義される集合で，"連続的変形"とは $[0,1]\times\Upsilon(\Sigma;J)\longrightarrow(M-\Pi^*(\Sigma;J))$ なる連続写像 f で，$f(0,x)\equiv x$ を満たすものによって $f(1,\Upsilon(\Sigma;J))=K$ と表わされることである。

以下 Π^* を定義する。$J=\{l_1,\cdots,l_s\}$ とし，各 $l_j\in J$ に対し $p_j\in C_{l_j}$ をとり，$P=\{p_j, \hat{\tau}_\Sigma(p_j), \hat{\tau}_\Sigma^{-1}(p_j) \mid j=1,\cdots,s\}$, $P\cap\partial D_m=\{q_1^m,\cdots,q_{k_m}^m\}$ とする。そして，γ_j^m ($j=1,\cdots,k_m-1$) は，q_j^m と q_{j+1}^m とを D_m 内で結ぶ連続曲線とし，$\gamma^m=\bigcup_{j=1}^{k_m-1}\gamma_j^m$，$\Gamma=\bigcup_{m=1}^{\nu_2}\gamma^m$ （$P\cap\partial D_m=\phi$ のときは，$\gamma^m=\phi$ とする。）と定義する。さらに，$\Pi=\Pi(\Sigma,J;\Gamma)$ を

$$\Pi=\{\xi_t(x)\mid x\in\Gamma,\ -T_\Sigma(\hat{\tau}_\Sigma^{-1}(x))\le t\le T_\Sigma(x)\}$$

と定め，$\Xi\ (\subset\Sigma)$ を

$$\Xi=\{x\in\Sigma-\Pi \mid x\text{ を含む }\overline{\Sigma-\Pi}\text{ の連結成分は }\partial\Sigma\text{ と交わる，あるいは }\hat{\tau}_\Sigma(\partial\Sigma)\text{ と }\hat{\tau}_\Sigma^{-1}(\partial\Sigma)\text{ との両方に交わる。}\}$$

と定める。このとき，$\Pi^*=\Pi^*(\Sigma,J;\Gamma)$ は，

$$\Pi^* = \Pi\cup(\Sigma-\Xi)$$

と定義される集合である。（命題Bの中のΠ^*はここに定義されたもので、実際には、Γのとり方にも依存する。）

[注]．仮定I, IIを満たすΣおよびJの存在は証明できる。

§3、$M=S^3$の場合．

$M=S^3$で，Σ，Jは仮定I, IIを満たすとする。このとき、命題Bによれば、$Y(\Sigma;J)$を$M-\Pi^*$の中でKに変形して$\pi_1(M-K)$が free group であるようにはできない。一方、$M=S^3$であるからMの中では$Y(\Sigma;J)$をK'に変形して$\pi_1(M-K')$が free となるようにすることができる。すなわちΠ^*がこのような変形を阻害している。

そこで"S^3上に minimal flow が存在するか？"（存在しないという予想が一般的である。）という問題を考えるとき、仮定I, IIを満たし、何らかの意味でΠ^*が最小になるようなΣ，Jを考え、その満たすべき性質を調べることが有効であると思われる。

Π^*の大きさを測る量としては．

$$\lambda(\Sigma;J)=3\times(\#J)-\#\{D_m \mid \Pi\cap\partial D_m\neq\phi\}$$

のようなものが考えられる。仮定I, IIを満たし、この$\lambda(\Sigma;J)$を最小にするようなΣ，Jについては、いくつ

かの特性をもつことが示される。上記の問題を考える為には、"これらの特性が、minimal flowの存在と両立し得るか？"ということを調べなければならない。